**Sugerencias didácticas**

Para alcanzar los aprendizajes esperados, el docente debe promover un interés real en la matemática. No basta que el alumno sea capaz de realizar una suma de fracciones u obtener la raíz cuadrada; es necesario mostrarle la utilidad práctica del conocimiento matemático, cuando sea posible.

La ventaja que se tiene en educación básica es que existen muchos ejemplos de la matemática como herramienta útil para modelar y resolver problemas reales. Aunque muchos de los problemas no aparecen en la vida diaria del alumno, sí le afectan de manera indirecta, ya que rigen los sistemas de comunicación como la radio y la televisión, el entretenimiento digital, los sistemas de seguridad social, o la búsqueda de información por internet, entre otras cosas.

A continuación se presentan varios problemas que se desarrollan para que el profesor tenga una referencia de cómo puede presentar actividades en las que el alumno integre y relacione varios conocimientos que se estudian en el segundo grado de secundaria.

**Representación de números por elementos geométricos**

Para deducir una fórmula que represente el término general de una sucesión de números, se requiere desarrollar una intuición matemática que dé una guía para llegar a un resultado correcto. El desarrollo de esta intuición matemática se construye con la resolución de problemas que puede comenzar con clásicos, pero que son nuevos para el alumno que los ve por primera vez.

Se considera la sucesión formada por la suma de $n$ números impares. Se puede comenzar planteando preguntas como:

- ¿Cuál es la suma de 1 + 3?
- ¿Cuál es la suma de 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15?
- ¿Cuál es la suma de 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23?

Luego se plantean las cuestiones:

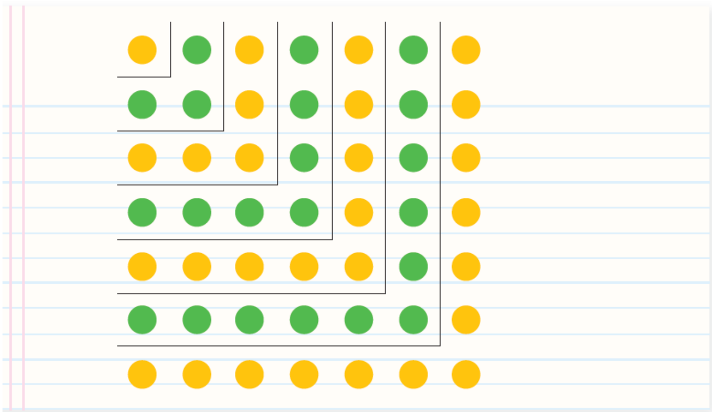
- ¿Qué característica tienen en común los sumandos en cada suma?
- ¿Cómo se representa algebraicamente un número impar?
- ¿Cómo se puede representar algebraicamente la suma de los primeros números impares?

El profesor debe esperar a que los alumnos formulen sus conjeturas y permitir que las expresen, para después discutirlas entre todo el grupo. En este punto, el profesor puede decidir, de acuerdo con lo expuesto por los alumnos, si es conveniente expresar algebraicamente el término general de la suma de los primeros $n$ números impares.

Para plantear una expresión algebraica puede proceder como sigue:

- ¿Consideras que la siguiente expresión representa la suma de los primeros *n* números impares? $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$
- Si $n = 1$, ¿qué valor numérico adquiere la expresión $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$?
- Si $n = 10$, ¿qué valor numérico adquiere la expresión$1 + 3 + 5 + \cdots + (2 - 1)$?
- ¿Qué utilidad tiene la expresión $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$?
- ¿Es la única manera de expresar la suma de los primeros *n* números impares?
- ¿Es posible encontrar una expresión más sencilla? Si así fuera, ¿cómo se llegaría a ella?

Es momento de apoyarse en un elemento gráfico que permita responder a las dos últimas preguntas.



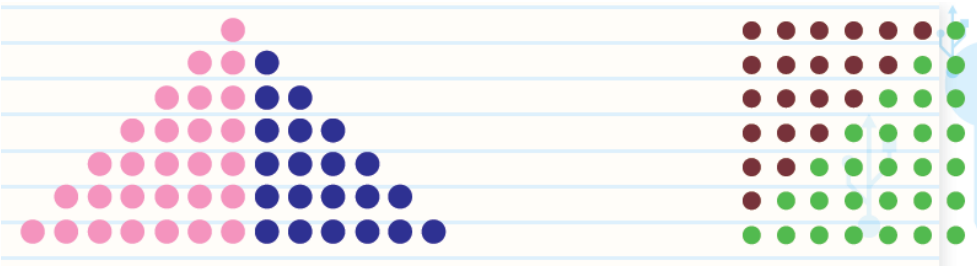
Se plantean las siguientes cuestiones relacionadas con la figura:

- ¿Cuál es el número de renglones y columnas?
- ¿Qué números representan la cantidad de puntos en cada región-L?
- ¿Cuál es la cantidad total de puntos en la figura?
- ¿Cuál es el valor de la suma $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$?
- ¿Cómo se relaciona la figura con la suma $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$?

Una vez discutidas estas preguntas, se plantea al alumno si la siguiente igualdad es válida:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

En el problema tratado, un ejercicio que permite al alumno reflexionar, analizar y repasar lo que se ha estudiado, es el que consiste en presentar el mismo problema, pero ahora pidiéndole que utilice las siguientes figuras para explicar por qué la igualdad $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, es válida.



Usar un mismo problema con dos soluciones diferentes permite observar lo siguiente:

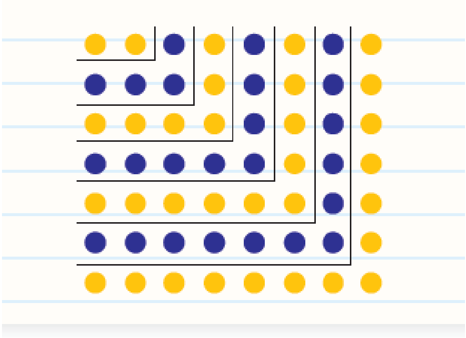
- Qué tanto de la primera actividad ha asimilado el alumno.
- Qué nivel de abstracción ha alcanzado el alumno.
- Qué aspectos deben trabajarse y repasarse para asimilar el contenido.

Siguiendo ideas similares, se puede plantear el problema de verificar la expresión algebraica para calcular la suma de los primeros *n* números naturales.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n + 1)}{2}$$

En una situación como ésta, la pregunta puede modificarse para hacer uso de una figura.

- ¿La igualdad $2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$ es correcta? ¿Cómo se le puede justificar?
- ¿Qué relación hay entre $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$ y la figura?

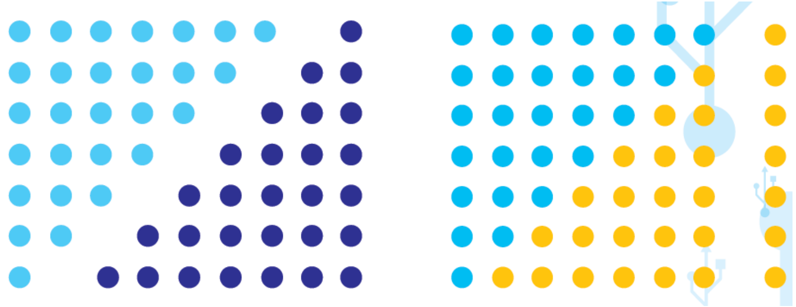


¿Cuántos puntos posee la figura? ¿Cómo calculo este valor?
¿Cómo se puede verificar que la siguiente afirmación es correcta o no?

La suma de los primeros $n$ números pares es $n(n+1)$

- ¿Cómo se pueden utilizar las respuestas a las anteriores preguntas para establecer la veracidad de la igualdad $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$?

Nuevamente, un buen ejercicio para el alumno es plantearle cómo se puede verificar la igualdad $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, usando las siguientes figuras.



Después de haber resuelto problemas de manera colectiva, considerando al profesor como un guía, es necesario plantear otros problemas a los alumnos para que el profesor se involucre más en la resolución de éstos y que gradualmente adquiera el papel de asesor.

A continuación se muestran algunos problemas ubicados en la temática presentada al principio que se pueden plantear para que los alumnos contraten los resultados con lo que ya realizaron.

Ya que la suma $1+2+3+\cdots+n$ se puede representar como un triángulo, a los números que se obtienen de este tipo de sumas se les conoce como números triangulares, y se denotan como $T_n=1+2+3+\cdots+n.$ Comprueba que las siguientes igualdades son válidas.

1. $T_{n-1}+\ T_n=\ n^2$

2. $T_{2n}=3T_n+\ T_{n-1}$

El primer problema es otro planteamiento para calcular la suma de los primeros *n* números impares, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. La dificultad consiste en darse cuenta de que ya se ha resuelto. En apariencia, el segundo tiene una dificultad mayor que el anterior, y es posible que a la vista del alumno parezca imposible de resolver; ahí es donde la asesoría o consejo del profesor es significativa.

El profesor debe ser capaz de dar sugerencias como:

- ¿Qué significa $T_{n2}$?
- ¿A qué son iguales las siguientes expresiones $2T_n$ y $T_n + T_{n-1}$, de acuerdo con lo visto antes?
- ¿Es cierto que $3T_n + T_{n-1} = 2T_n + (T_n + T_{n-1})$?
- ¿Para qué me sirve lo anterior al momento de resolver mi problema?

Una de las dificultades de la enseñanza de la matemática no es la resolución misma del problema, sino provocar que el alumno intente pensar y reflexionar sobre lo que hace.

Se presenta la solución completa del segundo problema para que el profesor lo resuelva correctamente antes de exponerlo a los alumnos, y de esta forma estime las dificultades que puedan presentarse, así como la manera en que pueden ser abordadas.

$$T_{2n} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2n$$

$$= \frac{2\,(2n+1)}{2}$$

$$= n(2n+1)$$

$$= 2n^2 + n$$

$$= (n^2 + n) + n^2$$

$$n(n+1) + n^2$$

$$= 2T_n + (T_n + T_{n-1})$$

$$= 3T_n + T_{n-1}$$